

Die Bedingung des Druckmaximums für eine durch den Stoss einer strömenden Flüssigkeit in Kreisbahn fortbewegte Fläche und die Verwertung des Ergebnisses für die Konstruktion von Wind- bezw. Wasserrädern und Propellern.

Von

Paul Crueger.

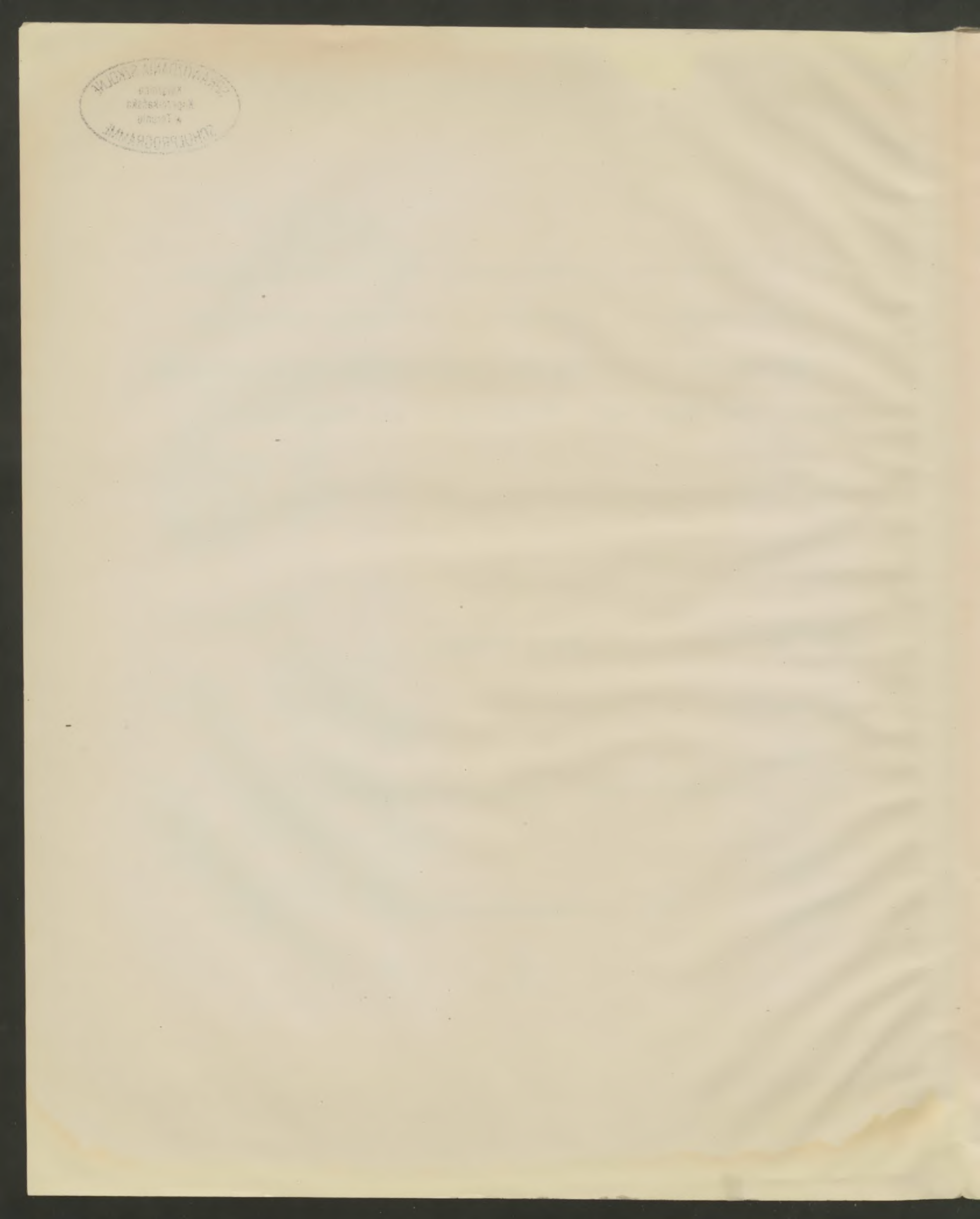
Wissenschaftliche Beilage für das Programm des Gymnasiums zu Stolp.

STOLP.

F. W. Feige's Buchdruckerei, Stolp.

1890. Prog. Nr. 139.

1890.



Einleitung.

Wird eine dünne, ebene Scheibe einer strömenden Flüssigkeit, dem fliessenden Wasser oder dem Winde, entgegengehalten, so erfährt die ruhende Scheibe einen Druck, welcher am stärksten ist, wenn die Fläche der Scheibe senkrecht zur Stromrichtung steht, und um so schwächer, je mehr die Lage der Fläche gegen die Stromrichtung geneigt ist. In letzterem Falle fällt auch die Druckrichtung nicht mehr mit der Stromrichtung zusammen, sondern sie ist angenähert normal zur Fläche der Scheibe. Ferner nimmt der Druck überhaupt zu, wenn die Geschwindigkeit der Strömung grösser wird.

Auf diesen einfachen, leicht zu beobachtenden Thatsachen beruht die Wirkungsweise der Wind- und Wasserräder, welche bestimmt sind, die in der bewegten Luft und dem fliessenden Wasser vorhandene lebendige Kraft nutzbar zu machen. Während aber bei den gebräuchlichen Windmühlen die Bewegung der Flügel in einer Ebene senkrecht zur Windrichtung erfolgt, weshalb die Flächen der Flügel gegen die Windrichtung geneigt sind, bewegen sich bei den direkt durch den Stoss des Wasserstroms betriebenen „unterschlächtigen" Wasserrädern die den Druck empfangenden Schaufeln in einer der Stromrichtung parallelen Ebene, sie sind also im allgemeinen senkrecht zur Stromrichtung gestellt.

Wenn in dem obigen Beispiel die Scheibe sich bewegt, die Flüssigkeit dagegen ruht, so bleiben die Druckerscheinungen im wesentlichen dieselben, da sie nur von der Geschwindigkeit und der Richtung abhängen, in welcher die Flüssigkeitsmoleküle mit der Scheibe zusammenstossen.

Dies Ergebnis findet seine Anwendung hauptsächlich bei den Propellern der Dampfschiffe. Die gebräuchlichsten dieser Propeller sind Schraube und Ruderrad, erstere im Prinzip mit den Windmühlenflügeln, letztere mit den unterschlächtigen Wasserrädern übereinstimmend.

Eine dritte Art der Verwendung findet sich für die Windkraft beim Segeln, indem hier die Bewegung bald in der Stromrichtung, d. i. der des Windes, wie bei den Wasserrädern, bald seitlich zur Windrichtung, wie bei den Windmühlen, erfolgt; im allgemeinen aber ist die Wirkungsweise eine aus beiden Arten zusammengesetzte.

Dies wird nur dadurch möglich — und darin besteht das Eigentümliche dieser Verwendungsart —, dass man der Segelfläche eine verschiedene Neigung gegen die Windrichtung geben kann, um je nach der Fahrtrichtung mehr vorwärts oder mehr seitwärts vom Winde zu segeln.

Wie nun ein Schiff fast auf einem Kreise herumfahren kann, wenn die Segelstellung fortwährend entsprechend geändert wird, da nur in der Richtung direkt gegen den Wind kein

nutzbarer Winddruck vorhanden ist, so könnten auch Wind- und Wasserräder eine derartige Einrichtung erhalten, dass die notwendige stetige Aenderung der Neigung der Druckflächen selbstthätig erfolgt, und auch für Propeller liesse sich dieses Prinzip verwerten.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist nun die Theorie des letztgenannten Prinzips, im besondern die Untersuchung, unter welcher Bedingung die in einer zur Stromrichtung parallelen Kreisbahn sich bewegende Fläche in jedem Punkte dieser Bahn den grösstmöglichen Druck in der Bewegungsrichtung erfährt. Daran schliesst sich die Erörterung und Theorie einiger Mechanismen, welche dazu dienen können, der Fläche in jedem Punkte der Bahn die beste Stellung zu geben, und zwar vorzugsweise in Anwendung auf Windräder. Zum Schluss folgt die Theorie eines auf gleichem Prinzip beruhenden Propellers.

§ 1. Das hydrodynamische Druckgesetz.

Ein in aller Strenge gültiges Gesetz für den Druck, welchen eine strömende Flüssigkeit durch den Stoss gegen eine derselben entgegenstehende beliebig geneigte Fläche ausübt, ist nicht bekannt. Es liegt dies wol zum Teil an der ungenügenden Zahl von vorliegenden genauen Beobachtungen, die ihrer Natur nach nicht leicht anzustellen sind, zum andern Teil an der grossen Zahl mitwirkender Einflüsse, die in Betracht zu ziehen sind. Denn der Druck ist zwar vorzugsweise abhängig von der Masse und Geschwindigkeit, welche in der Zeiteinheit zum Stoss gelangt, also von der Stromgeschwindigkeit und Art der Flüssigkeit nebst der Grösse der Fläche; doch scheint weder eine einfache Beziehung zu diesen Grössen zu bestehen, noch sind dies die einzigen Factoren. So sind die Flüssigkeitsteile, welche nahe der Mitte der Fläche auftreffen, mehr am Abfliessen gehindert, werden also einen grösseren Teil ihrer Geschwindigkeit abgeben, als die näher dem Rande zum Stoss gelangenden Teilchen. Auch diese können nur in der Weise abfliessen, dass sie die vorbeiströmenden Flüssigkeitsteilchen beschleunigen, da die durch die Fläche hervorgebrachte Querschnittsverengerung des Stromes nur durch grössere Geschwindigkeit der nächsten an der Fläche vorbeiströmenden Teilchen ausgeglichen werden kann. Demnach würde der Druck nicht einfach proportional der Flächenausdehnung sein, sondern sich in anderem, wahrscheinlich stärkerem Masse vergrössern; zugleich würde er durch die Gestalt der Fläche, insbesondere durch das Verhältnis der Länge zur Breite beeinflusst werden. Da die Fläche im allgemeinen nicht völlig eben sein wird, so ist auch dies zu berücksichtigen, und zwar ergeben hier Beobachtungen wie Theorie, dass eine konkave Fläche grösseren Druck erfährt als eine ebene oder gar konvexe. Wahrscheinlich ist auch, dass das Material und die Oberflächenbeschaffenheit der Fläche von Einfluss ist, wenn auch Beobachtungen hierüber nicht vorliegen. Es ist anzunehmen, dass die glattere Oberfläche einen etwas geringeren Druck erfährt, hauptsächlich aber die Reibung zwischen Flüssigkeit und Fläche sich ändert. Diese Reibung gerade ist ein Factor, der stets in dem Druckresultat vorhanden ist, und dessen Ermittelung die grössten Schwierigkeiten bietet. Sieht man die Reibung als Widerstandskraft an, so ist nicht einmal die Richtung dieser Kraft leicht zu bestimmen, noch weniger deren Grösse, jedenfalls aber ist die Richtung eine andere als die Druckrichtung. Sie kann daher die nutzbare Componente des Drucks sowol vermindern wie vermehren. Zulässig ist wol die Annahme, dass die Richtung der Reibung als Kraft der relativen Stromrichtung, d. i. der Richtung, welche der Strom in Bezug auf die in Bewegung befindliche Fläche hat, nahezu entgegengesetzt ist. Daraus würde sich eine Druckverminderung ergeben in allen Fällen, wo die Bewegungsrichtung der Fläche und die Projektion der relativen Stromrichtung auf diese Richtung einander entgegengesetzt sind. Dieser Fall ist stets vorhanden bei den gebräuchlichen Windmühlen, so dass aus deren Leistungen ein Rückschluss auf die Grösse des Winddrucks nicht gestattet ist, da er ein zu kleines Resultat

ergeben würde. Überhaupt scheint der Einfluss der Reibung nicht gering zu sein, und das dürfte besonders dazu beitragen, dass die von der Reibung absehende Theorie so wenig mit der Erfahrung übereinstimmt.

Die Abhängigkeit des Drucks von der Stromgeschwindigkeit ist eine doppelte, indem mit der grösseren Stromgeschwindigkeit nicht nur das in der Zeiteinheit zum Stoss gelangende Flüssigkeitsquantum wächst, sondern auch die lebendige Kraft der Flüssigkeitsteilchen eine grössere wird. Es lässt sich annehmen, dass ein Teil dieser lebendigen Kraft beim Stoss durch Umsetzung in Wärme verloren geht. Dieser Teil kann ein recht beträchtlicher sein, ohne dass eine so merkliche Erwärmung eintritt, dass derselbe durch Temperaturmessungen, die hier ihre besonderen Schwierigkeiten bieten, sich feststellen liesse. In Verbindung damit steht der Einfluss des Elasticitätsgrades der Flüssigkeit, den freilich die Theorie schwerlich berücksichtigen kann.

Doch auch eine Vermehrung des Drucks wird statthaben, welche den genannten Verlust weit überwiegen mag. Es erzeugen nämlich die an der Fläche vorbeiströmenden Flüssigkeitsteilchen einen negativen Druck auf der Rückseite der Fläche, dessen Grösse sowol von den Dimensionen der Fläche als von der Geschwindigkeit der Strömung abhängt. Da von denselben Elementen auch der positive Druck auf der Vorderseite der Fläche bestimmt wird, so ist die Wirkung des negativen Drucks dieselbe, als wenn die Fläche entsprechend grösser wäre.

Es bleibt noch die Abhängigkeit des Drucks von dem Stosswinkel zu erörtern, da die Fläche im allgemeinen nicht senkrecht, sondern unter wechselndem Winkel vom Flüssigkeitsstrom getroffen wird. Die einfache Beobachtung ergiebt, dass der Druck um so geringer, je spitzer der Stosswinkel. Welche Funktion des Stosswinkels aber die Druckänderung am besten wiedergiebt, ist nicht leicht auszumachen, und so gehen hier die Meinungen der Fachmänner weit auseinander. Einige setzen die Änderung des Drucks dem Sinus des Stosswinkels proportional, Viele dem Quadrat des Sinus, Andere haben dafür einen weniger einfachen Ausdruck. Es sei mir hier die Bemerkung gestattet, dass ich auf Citate und Litteraturangaben gänzlich verzichten muss, da mir die betreffende Litteratur gegenwärtig nicht zu Gebote steht.

Da es nach dem bisher Gesagten ein strenges Druckgesetz nicht giebt, so muss ich bei der folgenden Untersuchung mit einer Annäherung mich begnügen, die immerhin für die Praxis brauchbare Resultate liefert. Die im Folgenden benutzte Formel ist dieselbe, welche schon mehrfach für technische Zwecke Verwendung gefunden hat, beispielsweise auch für die gebräuchlichen Windmühlen.

Sollte eine andere Formel allgemeinere Geltung erlangen, so wäre es leicht, auf Grund derselben die Resultate neu zu berechnen.

Angenähertes Druckgesetz. Es sei (Fig. 1) AB ein Flächenelement, welches sich in der constanten Entfernung OR um O mit der Geschwindigkeit v bewegt, α der Winkel, welchen AB mit OR bildet, und φ der Winkel zwischen OR und OM, der Normalen zur Stromrichtung. Der Weg eines Moleküls der Flüssigkeit in einer Sekunde, also die Geschwindigkeit desselben, sei c.

Denkt man sich zunächst das Flächenelement ruhend und sieht gänzlich ab von der Reibung, so ist die Geschwindigkeit, mit welcher das Molekül auf die Fläche trifft, gleich der zur Fläche normalen Komponente der Geschwindigkeit, also $= c \cos (\varphi - \alpha)$. Die zur Flächenebene parallele Geschwindigkeitscomponente kann keinen Druck ausüben; sie würde nur als Reibung wirksam sein, von welcher wir hier absehen wollen.

Der Druck, welchen das mit der Geschwindigkeit $c \cos(\varphi - \alpha)$ auftreffende Molekül ausübt, ist proportional seiner Bewegungsgrösse, d. i., wenn μ die Masse des Moleküls bezeichnet, proportional $\mu\, c \cos(\varphi - \alpha)$.

Die Summe aller Moleküle, welche in der Zeiteinheit zum Stoss gelangen, ist proportional dem Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche die Projektion des Flächenelements auf die zur Stromrichtung normale Ebene, dessen Höhe die Stromgeschwindigkeit ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Grundfläche des Prismas ist das Flächenelement, die Höhe ist die zur Fläche normale Komponente der Stromgeschwindigkeit, mithin, wenn f die Grösse des Flächenelements AB bezeichnet, $f\, c \cos(\varphi - \alpha)$.

Die Summe der Massen der einzelnen Moleküle in der Volumeneinheit wird durch die Dichtigkeit δ der Flüssigkeit dargestellt.

Demnach ist der Gesammtdruck auf das ruhende Flächenelement in der Richtung der Flächennormale:

$$1) \qquad N_r = C\, \delta\, f\, c^2 \cos^2(\varphi - \alpha),$$

wo C eine Konstante bedeutet.

Aus dieser Formel für die ruhende Fläche ergiebt sich die für die bewegte Fläche gültige durch folgende Betrachtung.

Da es absolute Ruhe eines Körpers auf der Erde nicht giebt, weil jeder Körper, abgesehen von etwaigen anderen Bewegungen, an der Erdbewegung teilnimmt, so gilt auch in obiger Formel 1) nicht die absolute Stromgeschwindigkeit, sondern die relative in Bezug auf die Fläche. Diese allein ändert sich, wenn auch die Fläche bewegt wird, und zwar wird sie im vorliegenden Falle um so viel kleiner, als die Fläche in der Richtung des Stroms zurückweicht.

Die Fläche drehe sich um eine ausserhalb liegende, zur Stromrichtung senkrechte Axe mit der Geschwindigkeit v, welche kleiner ist als c. Ihre Geschwindigkeit in normaler Richtung ist gleich der Tangentialgeschwindigkeit multiplicirt mit dem Kosinus des Winkels zwischen Tangente und Flächennormale, also $v \cos \alpha$.

Demnach ist die relative Stromgeschwindigkeit in Bezug auf das bewegte Flächenelement

$$c \cos(\varphi - \alpha) - v \cos \alpha,$$

oder wenn man das Verhältnis $\frac{v}{c}$ mit a bezeichnet:

$$c \left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right].$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks für $c \cos(\varphi - \alpha)$ in die Formel 1) ergiebt sich der Normaldruck für das bewegte Flächenelement:

$$2) \qquad N = C\, \delta\, f\, c^2 \left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right]^2.$$

Für eine Fläche von endlicher Ausdehnung F ist dieser Ausdruck nicht ohne weiteres gültig, weil φ, α und OR nur für alle in einer zur Drehungsaxe parallelen Richtung angeordneten Flächenelemente denselben Wert haben, während für jedes seitlich benachbarte Flächenelement dieser Wert sich ändert. Wenn man als Mittelwert genannter Grössen den für die mittleren Flächenelemente gültigen annimmt, was bei nicht zu grosser Breite der Fläche gestattet ist, so wird die Formel auch für die endliche Fläche F in einer für den vorliegenden Zweck genügenden Annäherung Gültigkeit behalten.

§ 2. Die Bedingung des Maximums.

Da die Fläche gezwungen ist, sich in einer Kreisbahn zu bewegen, so ist nur die Komponente des Drucks in der Tangentenrichtung wirksam, während die Radialkomponente sich als Druck auf die Drehungsaxe äussert und hier zwar den schädlichen Reibungswiderstand vermehrt, aber keine Bewegung hervorbringt.

Die Tangentialkomponente des Drucks ist:

$$P = N \cos \alpha \text{ oder vermöge Formel 2)}$$

3) $$P = C\, \delta\, F\, c^2 \left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right]^2 \cos \alpha.$$

Unter diesem Drucke legt die Fläche F den Weg $v = a\, c$ zurück.

Es ist also die Nutzarbeit:

4) $$A = C\, \delta\, F\, a\, c^3 \left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right]^2 \cos \alpha.$$

Diese Formel liefert die Nutzarbeit für die einzelnen Werte von φ und α. Die Gesammtnutzarbeit würde sich hieraus ergeben durch Integration über alle Werte φ von 0 bis 2π, wobei α als Funktion von φ auszudrücken wäre. Da im Folgenden von diesem Integral kein Gebrauch gemacht wird, so möge dieser Hinweis genügen.

In obiger Gleichung 4) ändern die Grössen $C\, \delta\, F\, a\, c^3$ während der Drehung der Fläche ihren Wert nicht, d. h. sie sind von φ unabhängig und somit als konstant anzusehen.

Demnach wird die von der Fläche geleistete Arbeit A dann ein Maximum, wenn der Ausdruck

5) $$\left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right]^2 \cos \alpha$$

ein Maximum wird.

Da dieses Maximum für jeden Wert von φ stattfinden soll, so ist im Ausdruck 5) nur α als variabel anzusehen.

Die Bedingung des Druckmaximums ist dann, dass der erste Differentialquotient dieses Ausdrucks 5), genommen nach α, verschwindet.

Es ist aber, wenn man der Kürze wegen setzt:

$$u = \cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha$$
$$v = \cos \alpha$$
$$\frac{d\,(u^2 v)}{d\, \alpha} = v\, d\,(u^2) + u^2\, dv = 0$$
$$0 = 2\, u\, v\, du + u^2\, dv$$

oder nach Division mit dem gemeinsamen Factor u, welcher nicht gleich null werden kann, weil damit zugleich nach Formel 4) die Nutzarbeit gleich null würde:

$$0 = 2\, v\, du + u\, dv.$$

Nun ist $du = \sin(\varphi - \alpha) + a \sin \alpha,$
$dv = -\sin \alpha,$

also $$0 = 2 \cos \alpha \left[\sin(\varphi - \alpha) + a \sin \alpha\right] - \left[\cos(\varphi - \alpha) - a \cos \alpha\right] \sin \alpha,$$

6) $$0 = 2 \cos \alpha \sin(\varphi - \alpha) - \sin \alpha \cos(\varphi - \alpha) + 3\, a \sin \alpha \cos \alpha$$
$$= 2 \cos^2 \alpha \sin \varphi - 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi - \sin^2 \alpha \sin \varphi + 3\, a \sin \alpha \cos \alpha,$$
$$0 = \sin \varphi\, (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + 3 \sin \alpha \cos \alpha\, (a - \cos \varphi)$$

Durch Division mit $\cos^2 \alpha$, welches nicht gleich null sein kann, ohne Formel 5) zum Verschwinden zu bringen, wird:

6a)
$$0 = \sin \varphi \,(2 - \operatorname{tg}^2 \alpha) + 3 \operatorname{tg} \alpha \,(a - \cos \varphi),$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{3\,(a - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \operatorname{tg} \alpha = 2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\,(a - \cos \varphi)}{2 \sin \varphi} \pm \sqrt{\frac{9\,(a - \cos \varphi)^2 + 2}{4 \sin^2 \varphi}}$$

7)
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3\,(a - \cos \varphi) \pm \sqrt{9\,a^2 - 18\,a \cos \varphi + \cos^2 \varphi + 8}}{2 \sin \varphi}$$

Es ist angemessen, jetzt den Wert von $a = \frac{v}{c}$ festzustellen.

Da c, die Stromgeschwindigkeit der Flüssigkeit, sei diese Wind oder Wasser, grösseren oder geringeren Schwankungen unterliegt, während v am besten unverändert bleibt, so lässt sich a nur näherungsweise und zwar so bestimmen, dass die geleistete Arbeit möglichst gross wird. Der günstigste Wert von a ist ein verschiedener für die verschiedenen Werte von φ und α. Beachtet man aber, dass die grösste Arbeitsleistung stattfindet in der Nähe von $\varphi = 0$, so ist es angemessen, für a den Wert zu wählen, welcher für $\varphi = 0$ der günstigste. Es leuchtet ohne weiteres ein, dass für $\varphi = 0$ auch $\alpha = 0$ sein muss. Mit diesen Werten vereinfacht sich die Gleichung 4) in:

4a)
$$A = C\,\delta\,F\,c^3\,a\,(1-a)^2,$$

deren Maximum an die Bedingung geknüpft ist:

$$0 = (1-a)^2 - 2\,a\,(1-a),$$
$$= (1-a)\,(1-3a).$$

Hieraus folgt, da für $a = 1$ auch A in Gleichung 4a) gleich null wäre, dass

$$1 - 3\,a = 0$$

oder $a = \frac{1}{3}$ sein muss.

Für jeden andern Wert von φ würde der günstigste Wert von a ein grösserer sein. Es ist aber vorteilhaft, diesen kleinsten Wert für a beizubehalten, auch aus folgendem Grunde.

In dem Product $a\,(1-a)^2$ stellt der Factor a den Weg, der andere Factor $(1-a)^2$ die Kraft dar. Die gleiche Arbeit kann erhalten werden durch grösseren Weg bei kleinerer Kraft oder durch kleineren Weg bei grösserer Kraft. Letzteres ist für alle Maschinen vorteilhafter, bei welchen ein erheblicher Teil der Kraft durch die Reibungswiderstände vernichtet wird. Denn es sei w der Reibungswiderstand, der als konstant anzusehen ist, so wäre

$(1-a)^2 - w$ die übrigbleibende Kraft und $a\left[(1-a)^2 - w\right]$ die Arbeit.

Es würde also bei grösserem Wege a auch w mit diesem grösseren Werte von a multiplicirt werden.

Mit $a = \frac{1}{3}$ gestaltet sich auch die Rechnung wesentlich einfacher.

Ueberhaupt hat die theoretische Bestimmung von a für die Praxis nur insofern Bedeutung, als dadurch eine Grundlage für die Berechnung und Anordnung der Zwischenmaschine

geboten wird. Dass es in der Praxis nicht möglich ist, den vorteilhaftesten Wert für a bei wechselndem c festzuhalten, ist ohne erheblichen Nachteil, da eine Function in der Nähe des Maximums sich nur wenig ändert.

Die Gleichung 7) wird für $a = \frac{1}{3}$:

$$8)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1 - 3\cos\varphi \pm \sqrt{9 - 6\cos\varphi + \cos^2\varphi}}{2\sin\varphi},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1 - 3\cos\varphi + (3 - \cos\varphi)}{2\sin\varphi}$$

$$= \frac{2(1 - \cos\varphi)}{\sin\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

$$9)\qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1 - 3\cos\varphi - (3 - \cos\varphi)}{2\sin\varphi}$$

$$= -\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$10)\qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} \text{ oder } \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \varphi).$$

Welche der Gleichungen 9) und 10) die Bedingung des Maximums liefert, lässt sich ohne Benutzung des zweiten Differentialquotienten durch folgende Ueberlegung entscheiden.

Ein Maximum findet statt, wenn für $\varphi = 0$ auch $\alpha = 0$ wird.

Dies trifft für Gleichung 9) zu, denn für $\varphi = 0$ wird

$$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \infty,$$

also $\alpha = 0$.

In Gleichung 10) wird für $\varphi = 0$:

$$\alpha = \frac{\pi}{2},$$

also liefert diese kein Maximum.

Die Bedeutung dieses Wertes 10) wird unten besprochen werden.

Nachstehende Tabelle zeigt die zusammengehörigen Werte von φ und α für $a = \frac{1}{3}$ und zum Vergleichen auch für $a = \frac{4}{9}$, letztere mittels einer aus Gleichung 7) abgeleiteten Formel berechnet.

φ		α für a = 0,33		α für a = 0,44		φ		α für a = 0,33		α für a = 0,44	
Gr.	M.	Gr.	M.	Gr.	M.	Gr.	M.	Gr.	M.	Gr.	M.
10	—	9	56	12	12	100	—	67	14	69	12
20	—	19	26	22	54	110	—	70	42	72	30
30	—	28	11	32	18	120	—	73	54	75	36
40	—	36	3	40	12	130	—	76	52	78	0
50	—	43	0	47	30	140	—	79	40	80	30
60	—	49	6	53	6	150	—	82	22	83	12
70	—	54	28	57	54	160	—	84	58	85	30
80	—	59	13	62	6	170	—	87	30	87	54
90	—	63	26	66	0	180	—	90	0	90	0

Die Unterschiede der für $a = \frac{1}{3}$ und $a = \frac{4}{9}$ erhaltenen Werte von α erreichen nicht 5 Grad, sind also für die Praxis belanglos, da es kaum möglich sein dürfte, in der Ausführung eine genauere Einstellung der Druckflächen zu erreichen. Auch können, wie gesagt, die Resultate der Rechnung nur als Näherungswerte gelten, so dass schon aus diesem Grunde eine peinliche Genauigkeit in der Ausführung übertrieben wäre.

In Fig. 2 sind die Stellungen der Druckflächen AB für die von 30 ° zu 30 ° wachsenden Werte von φ schematisch dargestellt. FG ist die Windrichtung, WR die relative Windrichtung für die Fläche AB. Die Kurve 0 S F M G T stellt die von der Fläche AB geleistete Arbeit in willkürlicher Einheit graphisch dar. Der zu irgend einem Winkel φ gehörige Leitstrahl der Kurve zeigt die für diese Stellung geleistete Arbeit an. Für $\varphi = 0$ ist dieser Leitstrahl 0 M der grösste; er nimmt langsam ab bis $\varphi = 90\,^0$, darauf schneller, bis für $\varphi = 180\,^0$ die Arbeit gleich null wird. Immerhin wird aber auch von den Druckflächen, welche sich gegen den Wind bewegen, deren Stellung durch $\varphi > 90\,^0$ gegeben ist, einige Nutzarbeit geleistet; nur für $\varphi = 180\,^0$ ist ein todter Punkt vorhanden. Es lässt sich danach erwarten, dass schon durch eine einzelne Druckfläche eine dauernde Umdrehung bei Leergang der Maschine erzielt werden könnte, was durch Versuche an Modellen vollständig bestätigt ist.

§ 3. Mechanismen zur richtigen Einstellung der Druckflächen.

Ein Wind- oder Wasserrad, welches die im freifliessenden Strome aufgespeicherte lebendige Kraft so ausnutzen soll, dass ein Maximum der Nutzleistung erzielt wird, hat entweder eine in der Stromrichtung liegende Drehungsaxe, wie die gebräuchlichen Windmühlen, oder eine zur Stromrichtung senkrechte Axe, in welchem Falle die im Vorhergehenden gefundenen Resultate Verwertung finden. Erstere Art der Konstruktion ist zwar längst erprobt, doch von einigen Missständen begleitet, von denen der folgende besonders in die Augen fällt. Wegen der Veränderlichkeit der Windrichtung ist die ganze Mühle oder doch ein grosser Teil derselben, welcher die Flügel mit Flügelaxe, deren Lagern und Rad umfasst, drehbar um eine senkrechte Axe herzustellen. Die Einstellung erfolgt dabei entweder von Hand oder selbstthätig durch Windrose. Eine derartige Einrichtung fällt fort bei einem Windrade mit vertikaler Axe. Wasserräder mit zur Stromrichtung paralleler Axe bedürfen freilich dieser Einrichtung auch nicht, da die Stromrichtung nahezu dieselbe bleibt, aber solche haben der sonstigen ihnen anhaftenden Mängel wegen überhaupt wenig Eingang gefunden. Es würde bei Wasserrädern die neue Konstruktion ermöglichen, der Drehungsaxe beliebige Lagen in der zur Stromrichtung normalen Ebene zu geben. Von diesen wären die horizontale und vertikale Lage empfehlenswert, erstere bei seichterem, letztere bei tieferem Wasser. Derartige Wasserräder würden, da sie im freien Strom arbeiten, überall dort Verwendung finden können, wo eine Eindämmung des Flussbetts unthunlich ist, und sie verdienen dabei den Vorzug vor den gebräuchlichen anerkannt unvollkommenen Schiffsmühlen.

Im Folgenden wird nur die Einrichtung der Windräder näher besprochen, da die nötigen Modifikationen für Wasserräder sich leicht ergeben.

Das horizontal umlaufende Windrad besteht aus vier oder mehr Druckflächen, Segeln, welche in sich kreuzenden, passend verstrebten Rahmen so eingesetzt sind, dass sie um eine in der Mitte der Fläche liegende vertikale Axe drehbar sind. Die Segelflächen sind am besten Rechtecke, und ist ihre Drehungsaxe den längeren Seiten des Rechtecks parallel.

Es bleiben nun die Mechanismen zu erörtern, welche an den Enden der Segelaxen anzubringen sind, um die Stellung der Segel der Theorie gemäss zu regeln.

Die Windrichtung wird durch eine in der Mitte des Windrades angebrachte Windfahne, bezw. Windrose, angegeben.

1. Durch ein mit der Windfahne verbundenes Rad wird einem zweiten gleich grossen Rade die entgegengesetzte Drehung erteilt. Dieses trägt auf seiner Axe einen Krummzapfen (Excentrik), welcher mittels eines Lenkerkreuzes die Bewegung zu den vier Flügeln überträgt. Hier befinden sich Räder eigentümlicher Form, welche mit passend geformten Rädern auf den Enden der Segelaxen im Eingriff stehen. Die Aufgabe ist, die Formen letzteren Räderpaares zu bestimmen.

Es seien (Fig. 3) A und B die Axen eines solchen Räderpaares, s und s′ die Bogenstücke beider Räder, welche bei der Drehung aufeinander rollen, φ und α die zugehörigen Winkel, r und r′ die Leitstrahlen nach dem Berührungspunkt, $\lambda = AB$ die Entfernung der beiden Radaxen. Zuerst möge der Drehungssinn beider Räder festgestellt werden. Denkt man sich das Windrad in Ruhe, dagegen die Windfahne um den Winkel φ im Sinne der Fig. 1, d. h. nach

links, gedreht, so muss die Segelaxe um den entsprechenden Winkel α im gleichen Sinne gedreht werden, da vermöge Gleichung 9) α und φ den gleichen Drehungssinn haben. Dies geschieht auf die Weise, dass das mit dem Rade der Windfahne im Eingriff stehende Krummzapfenrad um den Winkel φ nach rechts gedreht wird, welche Drehung durch das Lenkerkreuz unverändert auf das Rad A übertragen wird. Wenn dieses aber sich um den Winkel φ nach rechts dreht, erfolgt die Drehung des getriebenen Rades um den Winkel α nach links, also im richtigen Sinne. An der relativen Bewegung der Räder wird aber nichts geändert, wenn, wie es wirklich geschieht, die Windfahne feststeht, und das Windrad sich dreht.

Betrachten wir nun die Fig. 3. Damit die Drehung des Rades A um den Winkel φ eine solche des Rades B um den Winkel α bewirke, müssen die zu diesen Winkeln gehörenden, auf einander rollenden Bogenstücke s und s' gleiche Länge haben. Diese Gleichheit findet statt, wenn die unendlich kleinen Bogenelemente ds und ds' einander gleich sind. Es ist aber, wenn dr, $d\varphi$, $d\alpha$ die entsprechenden Differentiale bezeichnen:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad ds'^2 = dr'^2 + r'^2 d\alpha^2,$$

folglich

$$dr^2 + r^2 d\varphi^2 = dr'^2 + r'^2 d\alpha^2;$$

nun ist wegen Gleichung 12) $dr = - dr'$, also

$$r^2 d\varphi^2 = r'^2 d\alpha^2 \text{ oder}$$

$$11) \qquad r d\varphi = r' d\alpha$$

Hinzutritt die Bedingung:

$$12) \qquad \lambda = r + r'.$$

Aus 11) folgt $r' = r \dfrac{d\varphi}{d\alpha}$,

und vermöge 12)

$$13) \qquad r\left(1 + \frac{d\varphi}{d\alpha}\right) = \lambda.$$

Das Differentialverhältniss $\dfrac{d\varphi}{d\alpha}$ ist aus Gleichung 9) $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$ zu bestimmen.

Durch Differentiation ergiebt sich aus $\alpha = \text{arc.}\left(\operatorname{tg} = 2 \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}\right)$

$$d\alpha = \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}\left(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$= \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{d\varphi}{1 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

$$14) \qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} = 1 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}; \quad \text{mithin}$$

$$r\left(2 + 3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) = \lambda \quad \text{oder}$$

$$\text{da } \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{2}$$

$$r\,(7 - 3 \cos \varphi) = 2\,\lambda.$$

Setzt man hier, um von den Polarkoordinaten auf rechtwinklige Koordinaten überzugehen,

$$r \cos\varphi = x \quad , \quad r \sin\varphi = y,$$

womit $r = \sqrt{x^2+y^2}$, so ist:

$$7\sqrt{x^2+y^2} - 3x = 2\lambda,$$
$$7\sqrt{x^2+y^2} = 2\lambda + 3x,$$
$$49x^2 + 49y^2 = 4\lambda^2 + 12\lambda x + 9x^2,$$
$$40x^2 + 49y^2 - 12\lambda x = 4\lambda^2.$$

Um das x enthaltende Glied fortzuschaffen, substituire man $x+\alpha$ statt x.

$$40x^2 + 49y^2 - x(12\lambda - 80\alpha) = 4\lambda^2 - 40\alpha^2 + 12\alpha\lambda,$$

und bestimme α so, dass der Faktor von x verschwindet, also

$$12\lambda - 80\alpha = 0$$

15) $$\alpha = \frac{3}{20}\lambda \text{ , mithin}$$

$$40x^2 + 49y^2 = \frac{49}{10}\lambda^2,$$

16) $$\frac{x^2}{\frac{49}{400}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{10}\lambda^2} = 1.$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, deren Halbaxen und lineare Excentricität dargestellt werden durch

16a) $$\left| \begin{array}{l} a = \sqrt{\frac{49}{400}\lambda^2} = \frac{7}{20}\lambda, \\ b = \sqrt{\frac{1}{10}\lambda^2} = \sqrt{0,1}\,\lambda, \\ e = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{3}{20}\lambda. \end{array} \right.$$

Der Wert von e stimmt mit dem in Gleichung 15) für α gefundenen überein. Die Drehungsaxe des Rades liegt also in der x—Axe um die Excentricität vom Mittelpunkte entfernt, geht demnach durch den Brennpunkt der Ellipse.

Das zweite Rad des Paares wird auf entsprechende Weise aus den Gleichungnn 11) und 12) berechnet.

Man erhält $r = r' \frac{d\alpha}{d\varphi}$ und

17) $$r'\left(1 + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \lambda.$$

Die Differentiation der Gleichung 9) ergiebt

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{d\varphi}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\varphi}{2}},$$

vermöge 9) ist $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$,

somit $\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{\cos^2\alpha\,(4 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{4} = \frac{4\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{4}$,

18) $$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{3\cos^2\alpha + 1}{4},$$

$$r'\left(1 + \frac{3\cos^2\alpha + 1}{4}\right) = \lambda,$$

$$r'(5 + 3\cos^2\alpha) = 4\lambda,$$
$$r'(13 + 3\cos 2\alpha) = 8\lambda.$$

Man setze: $r' \cos 2\alpha = x$
$r' \sin 2\alpha = y$
$r' = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$13\sqrt{x^2 + y^2} + 3x = 8\lambda,$$
$$169x^2 + 169y^2 = 64\lambda^2 - 48\lambda x + 9x^2,$$
$$160x^2 + 169y^2 + 48\lambda x = 64\lambda^2;$$

durch Einführung von $x + \alpha$ statt x:

$$160x^2 + 169y^2 + x(48\lambda + 320\alpha) = 64\lambda^2 - 160\alpha^2 - 48\alpha\lambda,$$

und wenn $48\lambda + 320\alpha = 0$,

19) $$\alpha = -\frac{3}{20}\lambda:$$

$$160x^2 + 169y^2 = \frac{338}{5}\lambda^2,$$

20) $$\frac{x^2}{\frac{169}{400}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{2}{5}\lambda^2} = 1.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Ellipse hat die Halbaxen und die Excentricität

20a) $$\left|\begin{array}{l} a = \frac{13}{20}\lambda, \\[2ex] b = \sqrt{\frac{2}{5}}\,\lambda, \\[2ex] e = \frac{3}{20}\lambda. \end{array}\right.$$

Diese Ellipse giebt aber noch nicht die Form des zweiten Rades, denn die Polarkoordinaten enthalten den Winkel 2α statt α. Wollte man aus 17) α beibehalten, so ergäbe sich eine Gleichung höheren Grades, die zur Konstruktion der Kurve weniger geeignet ist. Neben einigen andern Winken verdanke ich hier meinem Freunde, dem Privatdocenten Dr. Wiechert in Königsberg, eine einfache Methode, aus der in Gleichung 20) dargestellten Ellipse die gesuchte Kurve zu konstruiren. Man ziehe von einem Brennpunkte der Ellipse aus eine genügende Anzahl Leitstrahlen, trage diese der Reihe nach auf den Strahlen eines Büschels ab, welche die halben Winkel der Leitstrahlen mit einander bilden, und verbinde die auf den Strahlen bestimmten

Punkte durch einen fortlaufenden Zug, so ist dies die gesuchte Kurve. Dieselbe besitzt einen Mittelpunkt, den Ausgangspunkt der Strahlen, da dieselben Werte der Leitstrahlen wegen der doppelten Anzahl der Strahlen des Büschels nach je 180 Grad wiederkehren. Zugleich ergiebt sich, dass erst zwei Umdrehungen des Rades A eine Umdrehung des Rades B bewirken. Hierin liegt ein Vorteil für die Ausführung insofern, als durchschnittlich nur die Hälfte der zur Drehung des Segels nötigen Kraft auf das Rad A einzuwirken hat, also der Triebkraft des Windrades entzogen wird. Der fernere günstige Umstand möge hier wenigstens angedeutet werden, dass für $\varphi = 0$, wo das Übersetzungsverhältnis 1 : 1 ist, das Segel selbst das Bestreben hat, seine zur Windrichtung normale Stellung zu bewahren, und dadurch die Drehung nicht unbedeutend erleichtert.

Die Formen des Räderpaares sind in Fig. 4 dargestellt. A und B bezeichnen wieder die Drehpunkte.

II. Wird die Uebersetzung im Verhältnis von 2 : 1, welche nach dem Gesagten von den unrunden Rädern zugleich bewirkt wird, auf die zur Umkehrung der Bewegungsrichtung schon vorhandenen runden Räder übernommen, so erfährt die Form der unrunden Räder eine die Ausführung erleichternde Änderung.

Es können dabei die Räder entweder die in I. gegebene Anordnung behalten, oder die Windfahne wirkt direkt mittels eines auf ihrer Axe befindlichen Krummzapfens auf das Lenkerkreuz und durch dieses auf die an den Windradarmen befestigten runden Räder; diese treiben andere von doppeltem Umfange, welche, mit einem der unrunden Räder auf gemeinsamer Axe angeordnet, dem zweiten auf der Segelaxe befestigten unrunden Rade die geforderte Bewegung erteilen.

Diesen letzteren Fall wollen wir hier betrachten.

Es seien wie oben A und B die Drehungsaxen der unrunden Räder, r und r′ die Leitstrahlen s und s′ die gleichen Bogenstücke, u und α die entsprechenden Drehungswinkel.

Hier ist, wenn das Windrad sich um den Winkel φ dreht, vermöge der Uebersetzung durch die runden Räder die Drehung u des Rades A gleich $\frac{\varphi}{2}$, die des Rades B gleich α.

Da beide Räder Stirnräder sind, muss wieder die Summe der entsprechenden Leitstrahlen konstant sein.

Die Bedingungen des Rollens sind:

$$ds = ds' \text{ und } r + r' = \lambda,$$

also

$$r\,du = r'\,d\alpha, \quad r' = r\frac{du}{d\alpha};$$

$$r\left(1 + \frac{du}{d\alpha}\right) = \lambda. \tag{21}$$

Vermöge Gleichung 14) ist:

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{d\varphi}{2d\alpha} = \frac{1 + 3\sin^2\frac{\varphi}{2}}{2}.$$

Die Einsetzung dieses Wertes in 21) liefert:

$$r\left(3 + 3\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = 2\lambda,$$

$$r\,(9 - 3\cos\varphi) = 4\,\lambda;$$

durch Übergang zum rechtwinkligen Koordinatensystem:

$$9\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 4\lambda,$$
$$72x^2 + 81y^2 - 24\lambda x = 16\lambda^2;$$

$x + \alpha$ statt x:

$$72x^2 + 81y^2 + x\,(144\alpha - 24\lambda) = 16\lambda^2 - 72\alpha^2 + 24\alpha\lambda,$$

$$144\alpha = 24\lambda,\ \alpha = \frac{1}{6}\lambda:$$

$$72x^2 + 81y^2 = 18\lambda^2,$$
$$8x^2 + 9y^2 = 2\lambda^2,$$

22) $$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{2}{9}\lambda^2} = 1.$$

22a) $$a = \frac{1}{2}\lambda\ ,\ b = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\lambda\ ,\ e = \frac{1}{6}\lambda.$$

Auch diese Radform ist eine Ellipse mit einer durch den Brennpunkt gehenden Drehungsaxe.

Für das zweite Rad des Paares ist

$$r'\left(1 + \frac{d\alpha}{du}\right) = \lambda.$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{2\,d\alpha}{d\varphi} = \frac{1 + 3\cos^2\alpha}{2} \text{ nach Gleichung 18),}$$

demnach

$$r'\,(3 + 3\cos^2\alpha) = 2\,\lambda,$$
$$r'\,(9 + 3\cos 2\alpha) = 4\,\lambda,$$
$$9\sqrt{x^2 + y^2} + 3x = 4\,\lambda,$$
$$72\,x^2 + 81\,y^2 + 24\,\lambda x = 16\,\lambda^2;$$

$x + \alpha$ statt x:

$$72\,x^2 + 81\,y^2 + x\,(24\,\lambda + 144\,\alpha) = 16\,\lambda^2 - 72\,\alpha^2 + 24\,\alpha\lambda,$$

$$\alpha = -\frac{1}{6}\lambda:$$

$$72\,x^2 + 81\,y^2 = 18\,\lambda^2,$$

22) $$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{2}{9}\lambda^2} = 1.$$

22a) $$a = \frac{1}{2}\lambda\ ,\ b = \frac{1}{3}\sqrt{2}\,\lambda\ ,\ e = \frac{1}{6}\lambda.$$

Das zweite Rad hat also gleiche Form, wie das erste.

Wenn das Rad A sich um $\frac{\varphi}{2}$ dreht, erfolgt eine Drehung des Rades B um α. Der Drehung des Rades A um φ entspricht also die Drehung des Rades B um 2α. Die in 22) gefundene Radform ist somit die richtige auch für das Rad B.

Es mag hier der Ort sein, auf einen zweckmässigen Ersatz der Ellipsenräder hinzuweisen, welcher anscheinend noch nicht bekannt ist, und dessen Verwendung auch für unsern Fall sich empfiehlt.

Bekanntlich haben die Ellipsenräder mit andern unrunden Rädern den Übelstand gemein, dass die Richtung des Zahndrucks mit der Bewegungsrichtung einen Winkel bildet an allen den Punkten, deren Tangente nicht normal zum Leitstrahl steht. Dieser Umstand bewirkt eine grössere Reibung und ein stärkeres Abführen der Radzähne an diesen Stellen, was wiederum leicht ein Aussetzen der Zähne herbeiführt. Der Uebelstand tritt um so mehr hervor, je grösser die Excentricität der Räder ist. Eine Einrichtung, welche diese Missstände vermeidet, gründet sich auf die Eigenschaft rollender Ellipsen, dass ausser den als Drehpunkte dienenden Brennpunkten auch die rotirenden Brennpunkte die konstante Entfernung 2a haben.

Es seien (Fig. 5) M und N die ruhenden Brennpunkte zweier auf einander rollender gleicher Ellipsenräder, P der Berührungspunkt, M′ und N′ die zweiten Brennpunkte, O und R die Scheitelpunkte. Beim Rollen muss stets der Bogen OP der einen gleich dem Bogen RP der andern Ellipse sein. Wegen der Gleichheit beider Ellipsen liegen also die in P zusammenfallenden Punkte der beiden Kurven symmetrisch in Bezug auf die Brennpunkte und umgekehrt, d. h. $MP = N'P$, $NP = M'P$. Da nun $M'P + MP$ gleich der grossen Axe 2a, so folgt $NP + MP = 2a$. Es ist aber 2a die konstante Entfernung MN, also ist MPN eine Gerade. In gleicher Weise folgt aus der Symmetrie, dass M′PN′ eine Gerade und gleich 2a ist.

In Benutzung dieser Eigenschaft verbindet man die rotirenden Brennpuukte M′N′ durch eine Mittelschiene mit Drehzapfen in M′ und N′; dann ändert sich die Bewegung der Räder nicht, auch wenn die Verzahnung teilweise fortfällt, da die Schiene M′N′ nach Art einer Pleuelstange die Bewegung des einen auf das andere Rad überträgt. Todte Punkte hat diese Uebertragung nur an den Scheiteln der grossen Axe, dort ist also die Verzahnung beizubehalten.

Man erkennt, dass die Verzahnung dort fortfällt, wo sie nach dem oben Gesagten am ungünstigsten wirkt. Ein fernerer Vorzug dieser Einrichtung ist, dass die Zahnreibung in die günstigere Zapfenreibung umgewandelt wird.

In Fig. 6 ist dieser Mechanismus dargestellt. Die Brennpunkte M und N liegen auf GH, dem Windradarm, fest. M′N′ ist die Mittelschiene. OP und QR sind die verzahnten Bogenstücke, OSQ und PTR die ausfallenden Bogenstücke des Rades MM′. Gleiches gilt für das Rad NN′.

Eine Modifikation dieses Mechanismus zeigt Fig. 7.

Es beschreiben nämlich die Punkte der Mittelschiene M′N′ lemniskatenähnliche Kurven, unter welchen die der um $a - e$ von M′ und N′ entfernten Punkte K und L besonders wichtig sind, da sie je einen Rückkehrpunkt E und F in der Linie MN haben.

Durch kurze, diesem Teil der Kurve entsprechend geformte Gleitstücke an den Rückkehrpunkten E und F, in welchen passende, an den genannten Punkten K und L der Mittelschiene befestigte Stifte Führung finden, wird ohne Mitwirkung der Verzahnung eine zwangläufige Bewegung erzielt. Die Räder reduciren sich dabei auf zwei Schienen MM′ und NN′ von der Länge 2e und eine Mittelschiene M′N′ von der Länge 2a nebst genannten Gleitstücken und Stiften.

III. Bei Anwendung eines Lenkerkreuzes ist Erfordernis, dass dieses fast absolute Starrheit besitzt, ebenso wie die Radarme eine starre Verbindung haben müssen, damit die

gegenseitige Lage der Drehpunkte unverändert bleibt. Da dies in der Praxis besonders bei grosser Länge der Radarme nicht leicht zu erreichen ist, so würde eine Anordnung den Vorzug verdienen, welche eine losere Verbindung der einzelnen Teile des Bewegungsmechanismus gestattet; eine solche ist folgende.

Mit der Windfahne ist ein horizontales unrundes Kammrad auf derselben Axe befestigt. Auf jedem der Windradarme ist eine horizontale Welle von der Länge des Radarms gelagert, welche am inneren Ende ein Triebrad von grosser Breite trägt, in welches das Kammrad eingreift. Das äussere Ende der Welle trägt ein gewöhnliches konisches Triebrad, welches auf ein passendes konisches Rad am Ende der Segelaxe wirkt. Durch das Kammrad wird die mit den Triebrädern versehene horizontale Welle in eine ungleichförmige, periodisch wechselnde Bewegung gesetzt, welche sich auf die Segelaxe überträgt. Der Drehungssinn der Segelaxe ist dann der richtige, wenn das Kammrad und das Kegelrad der Segelaxe auf verschiedenen Seiten der horizontalen Welle eingreifen.

Denkt man sich das Kammrad direkt, d. h. ohne Zwischenschaltung der horizontalen Welle, mit dem Rade der Segelaxe in Verbindung gesetzt, so würde sich, abgesehen vom Drehungssinn, nichts ändern. Nun sei c der Radius des Kegelrades, α dessen Drehungswinkel, r der veränderliche Leitstrahl des Kammrades mit dem Drehungswinkel φ, so muss folgende Bedingung erfüllt sein:

23) $$r\,d\varphi = c\,d\alpha \quad , \quad r\frac{d\varphi}{d\alpha} = c.$$

Mit Benutzung von Gleichung 14) wird

$$r\left(1 + 3\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) = c,$$

$$5\,r - 3\,r\cos\varphi = 2\,c,$$

und in rechtwinkligen Koordinaten:

$$16x^2 + 25y^2 - 12cx = 4c^2,$$

woraus durch Substitution von $x + \frac{3}{8}c$ statt x:

24) $$\frac{x^2}{\frac{25}{64}c^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}c^2} = 1 \quad , \quad \text{somit}$$

24a) $$a = \frac{5}{8}c \ , \ b = \frac{1}{2}c \ , \ e = \frac{3}{8}c.$$

Die Kurve ist dargestellt in Fig. 8.

Der Brennpunkt 0 ist Drehpunkt.

IV. Zur Umwandlung der gleichförmigen Drehung in die von der Theorie geforderte ungleichförmige lässt sich auch das bekannte Kreuz- oder Universal-Gelenk benutzen. Besser als das einfache ist eine Modifikation des doppelten Universalgelenks hierzu geeignet.

Nach Reuleaux (Construkteur, §. 115) besteht für das einfache Universalgelenk bei dem Ablenkungswinkel α der Wellenaxen zwischen den Drehwinkeln ω und ω' der treibenden und getriebenen Welle die Beziehung:

25) $$\frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega} = \cos\alpha,$$

wobei die Werte von ω so gezählt sind, dass bei $\omega = 0$ die Querzapfenaxe der getriebenen und abgelenkten Welle in der Ablenkungsebene steht.

Beim doppelten Universalgelenk ist zwischen die treibende und getriebene Welle eine Zwischenwelle eingeschaltet. Sind α und α' die Winkel, welche die treibende Welle A und die getriebene B mit der Zwischenwelle C bilden, ω und ω' die Drehwinkel der Wellen A und B, so ist $\operatorname{tg} \omega \cos \alpha$ die Tangente des Drehwinkels der Zwischenwelle C, also

$$\operatorname{tg} \omega' = \operatorname{tg} \omega \cos \alpha \cos \alpha' \quad \text{oder}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \cos \alpha \cos \alpha'.$$

Hierbei liegt die Querzapfenaxe von B um 90^0 gegen diejenige von A verdreht, mithin sind auch die Querzapfenaxen der Zwischenwelle C um 90^0 gegeneinander verdreht; die Kreuzgelenke sind also „ungleichgelegene“. Nimmt man $\alpha = \alpha'$, was aus mehreren Gründen vorteilhaft ist, so wird:

$$26) \qquad \frac{\operatorname{tg} \omega'}{\operatorname{tg} \omega} = \cos^2 \alpha' \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega' \frac{1}{\cos^2 \alpha'}.$$

Unsere Formel 9) $\operatorname{tg} \alpha = 2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ wird mit dieser 26) identisch, wenn man setzt: $\alpha = \omega$, $\frac{\varphi}{2} = \omega'$, $\cos^2 \alpha' = \frac{1}{2}$, woraus

$$27) \qquad \alpha' = 45^0.$$

Die Anordnung des Räderwerks mit doppeltem Universalgelenk ist demnach folgende. Von der vertikalen Windfahnenaxe wird auf die horizontalen nach den Enden der Radarme führenden Wellen die Drehung durch Kegelräder im Verhältniss von 2 : 1 übertragen. Dann besitzt jede horizontale Welle den Drehwinkel $\frac{\varphi}{2}$, und nach richtiger Einschaltung zweier „ungleichgelegener“ Universalgelenke zwischen die horizontale Welle und die vertikale Segelaxe besitzt letztere den verlangten Drehwinkel α.

In Fig. 9 ist das doppelte Universalgelenk schematisch dargestellt.

V. Eine eigentümliche Anordnung erfährt das Räderwerk, wenn man für jedes Segel eine besondere Windfahne verwendet. Dieselbe hat ihre Stelle unweit der Segelaxe, nimmt also an der Drehung des Windrades Teil. Ihre Stellung zeigt daher nicht die wahre Windrichtung, sondern die relative, d. i. die Resultirende aus der Windgeschwindigkeit und der entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit des Rades. In Bezug auf den relativen Wind ist die Segelfläche als ruhend zu denken. Dann gilt das abgeleitete Druckgesetz ebenfalls, wenn man darin $a = 0$ setzt.

Aus Formel 5) erhält man:

$$28) \qquad \cos^2 (\varphi - \alpha) \cos \alpha = \text{Maximum}$$

Hier bedeutet φ den Winkel zwischen dem Radarm und der Normale der relativen Windrichtung.

Als Bedingung des Maximums liefert Gleichung 7) für $a = 0$:

$$29) \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-3 \cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{2 \sin \varphi}.$$

Setzt man unter dem Wurzelzeichen $\cos^2 \varphi$ konstant $= 1$, so wird der Ausdruck erheblich vereinfacht. Der dabei begangene Fehler ist so gering — die grösste Abweichung für α beträgt kaum 4^0 —, dass er für die Praxis nicht ins Gewicht fällt.

Man erhält:

$$30)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{-3\cos\varphi \pm 3}{2\sin\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Auch hier liefert der erstere Wert das Maximum.

Eine noch bessere Annäherung erhält man, weil die Abweichungen auf beiden Seiten des richtigen Wertes liegen und nur etwa 2^0 erreichen, wenn man — was durch Probiren gefunden — annimmt:

$$30\text{a})\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Dann folgt:

$$31)\qquad \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{24\cos^2\alpha + 25}{70} = \frac{37 + 12\cos 2\alpha}{70}$$

$$32)\qquad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{50 + 48\sin^2\frac{\varphi}{2}}{35} = \frac{74 - 24\cos\varphi}{35}$$

Entsprechend den Winkeln φ und α müssen beide Räder gleichen Drehungssinn haben, was ohne Einschaltung eines dritten Rades nur dadurch zu erreichen ist, dass das kleinere Rad in dem grösseren läuft. Ob dies bei unrunden Rädern möglich sein wird, lässt sich allgemein nicht vorhersagen.

Im vorliegenden Falle ist, wenn R der Leitstrahl des Rades B mit dem Drehwinkel α, r jener des Rades A mit dem Drehwinkel φ, und λ der Axenabstand ist:

$$R\,d\alpha = r\,d\varphi,$$

$$33)\qquad R = r\frac{d\varphi}{d\alpha},$$

$$34)\qquad r = R\frac{d\alpha}{d\varphi};$$

$$35)\qquad R - r = \lambda.$$

$$36)\qquad r\left(\frac{d\varphi}{d\alpha} - 1\right) = \lambda,$$

und vermöge Formel 32)

$$r\,(39 - 24\cos\varphi) = 35\,\lambda,$$

$$39\sqrt{x^2 + y^2} = 35\,\lambda + 24\,x,$$

$$945\,x^2 + 1521\,y^2 - 1680\,\lambda x = 1225\,\lambda^2,$$

$x + \frac{8}{9}\lambda$ statt x:

$$945\,x^2 + 1521\,y^2 = \frac{5915}{3}\lambda^2,$$

$$2835\,x^2 + 4563\,y^2 = 5915\,\lambda^2,$$

37) $$\frac{x^2}{\frac{5915}{2835}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{5915}{4563}\lambda^2} = 1.$$

37a) $$a = 1{,}444\,\lambda, \quad b = 1{,}138\,\lambda, \quad e = 0{,}889\,\lambda.$$

Der grösste und kleinste Wert von r ist

$$a + e = 2{,}333\,\lambda \text{ und } a - e = 0{,}555\,\lambda.$$

Vermöge 35) und 34 ist ferner:

38) $$R\left(1 - \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \lambda,$$

und vermöge 31)

$$R\,(33 - 12\cos 2\,\alpha) = 70\,\lambda,$$

$$1089\,x^2 + 1089\,y^2 - 1630\,\lambda\,x = 4900\,\lambda^2 + 144\,x^2,$$

nach Substitution von $x + \frac{8}{9}\lambda$ statt x:

$$945\,x^2 + 1089\,y^2 = \frac{16940}{3}\lambda^2,$$

39) $$\frac{x^2}{\frac{16940}{2835}\lambda^2} + \frac{y^2}{\frac{16940}{3267}\lambda^2} = 1.$$

39a) $$a = 2{,}444\,\lambda, \quad b = 2{,}277\,\lambda, \quad e = 0{,}889\,\lambda.$$

Hier sind der grösste und kleinste Wert von R:

$$a + e = 3{,}333\,\lambda \text{ und } a - e = 1{,}555\,\lambda,$$

also gleich den um $1\,\lambda$ vergrösserten Werten r des kleineren Rades, was als Probe der Rechnung dienen kann.

Das Rad B ist durch die Gleichung 39) noch nicht gegeben, weil der Winkel in 39) 2α statt α ist. Man findet aber aus der Ellipse 39) die Radform des grösseren Rades, indem man nach der oben für Gleichung 20) angegebenen Methode konstruirt. Ein Rollen des kleineren Rades in dem grösseren ist deshalb möglich, weil die grosse Axe des kleineren Rades, d. i. $2a = 2{,}888\,\lambda$, kleiner ist als die kleine Axe des grösseren Rades, d. i. $2\,(a - e) = 3{,}110\,\lambda$. Durch Versuch am Modell wird das Gesagte bestätigt In Fig. 11 ist das Räderpaar dargestellt; A und B sind die Drehpunkte.

Modifikationen des Mechanismus V. würden sich ergeben durch Einschaltung eines dritten Rades. So z. B. liessen sich beide Räder als Kammräder konstruiren; ein dazwischen gelagertes cylindrisches Triebrad würde dann die Übertragung und zugleich die Umkehrung der Bewegungsrichtung bewirken, was für die Stellung der Räder zu beachten wäre. Das eine Rad könnte Kreisform erhalten, wodurch zugleich die Form des zweiten Rades bestimmt wäre; diese liesse sich nach dem Vorhergehenden leicht berechnen

Dieser Mechanismus V. löst ganz allgemein das Problem, eine nicht in Kreisbahn, sondern beliebig sich bewegende Fläche so einzustellen, dass die Druckkomponente in der Bewegungsrichtung jederzeit ein Maximum ist. Denn die beste Stellung der Druckfläche hängt nur ab von der relativen Windrichtung, welche ihrerseits bestimmt wird durch die Geschwindigkeit und Richtung sowol des Flüssigkeitsstromes wie der Bahn der Fläche.

Da nun die Windfahne hier die relative Windrichtung anzeigt, so kommt die Eigenbewegung der Fläche nicht weiter in Betracht. Es gilt daher das Maximum für jede Geschwindigkeit und Richtung der Bewegung.

Beispielsweise würde an einem Segelboot sich die Einrichtung treffen lassen, dass mit Benutzung des Mechanismus V. das Segel sich für jede durch das Steuer bewirkte Richtung der Fahrt selbstthätig einstellt.

VI. Will man bei Benutzung nur einer Windfahne in der Mitte und eines Lenkerkreuzes die Einstellung durch je zwei an den Radarmen befestigte Räder erreichen, so müssen diese gleichfalls inneren Eingriff haben.

Die Formeln sind, da wieder

$$R - r = \lambda,$$

$$R\, d\alpha = r\, d\varphi, \text{ wo } \varphi \text{ die frühere Bedeutung hat.}$$

$$R\left(1 - \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) = \lambda;$$

aber $\frac{d\alpha}{d\varphi}$ aus Formel 18) $= \frac{3\cos^2\alpha + 1}{4}$,

$$R\,(3 - 3\cos^2\alpha) = 4\,\lambda,$$

$$R \sin^2\alpha = \frac{4}{3}\,\lambda,$$

$$R \sin\alpha = x, \quad \sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{4}{3}\,\lambda,$$

41)
$$9\,x^4 = 16\,\lambda^2\,(x^2 + y^2).$$

Bequemer wird die Gleichung, wenn man wieder $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ setzt.

$$R\,(1 - \cos 2\,\alpha) = \frac{8}{3}\,\lambda,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} - x = \frac{8}{3}\,\lambda,$$

42)
$$y^2 = \frac{64}{9}\,\lambda^2 + \frac{16}{3}\,\lambda x,$$

welches die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $p = \frac{8}{3}\,\lambda$.

Aus dieser Parabel lässt sich die Kurve 41) auf die oben für Gleichung 20) angegebene Art konstruiren.

Für das innere Rad findet man aus

$$r\left(\frac{d\varphi}{d\alpha} - 1\right) = \lambda$$

vermöge 14)
$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = 1 + 3\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$3\,r \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \lambda,$$

$$r\,(1 - \cos\varphi) = \frac{2}{3}\,\lambda,$$

$$y^2 = \frac{4}{9}\,\lambda^2 + \frac{4}{3}\,\lambda r, \tag{43}$$

eine Parabel mit dem Parameter $p = \frac{2}{3}\,\lambda$.

Beide Radkurven erstrecken sich ins Unendliche, also würde dem Anscheine nach ein Räderwerk dieser Art nicht gangbar sein. Im Folgenden wird jedoch eine Möglichkeit gezeigt werden, diese Radkurven zu benutzen.

Von Reuleaux (Constructeur §. 195) ist ein Räderpaar mit innerem Eingriff angeführt, in welchem das kleinere Rad nur 2, das grössere 4 Zähne hat. Die Zahnkurven sind für dieses gerade Linien, für jenes Punkte.

Eine solche Punktverzahnung mit geringer Zähnezahl lässt sich auch für das parabolische Rad 43) anwenden, wodurch zugleich die Zahnkurven für das grössere Rad bestimmt sind. Da die Berechnung derselben hier zu weit führen würde, so möge ein kurzer Hinweis genügen. Die Zahnkurven gehören zu den Rolllinien, und zwar ist hier der besondere Fall, dass eine Parabel auf einer Kurve 4ten Grades rollt. Wählt man die als Zähne anzusehenden Punkte der Parabel in der Nähe des Brennpunkts, so sind auch die Rolllinien endliche geschlossene Kurven; für den Brennpunkt selbst ist diese Rolllinie ein Kreis.

Eine hinreichend genaue Führung erhält man schon, wenn man dem Rade 43) drei Punkte als Zähne wählt. Die Zähne sind dabei als kleine Rollen zu konstruiren, welche in den als Nuthen ausgeführten Zahnkurven des grösseren Rades sichere Führnng finden.

Fig. 12 stellt ein solches Räderwerk dar. Die beiden ins Unendliche verlaufenden Äste der Kurve 41) sind CDE und FGH, ihr Mittelpunkt und Drehpunkt ist B. Die Parabel 43) XUY dreht sich um den Brennpunkt A. Als Zähne der Parabel sind angenommen der Scheitelpunkt U und die beiden Punkte V und W, deren Koordinaten $x = \lambda$, $y = \pm \lambda$ sind. Der Punkt U beschreibt bei der Drehung die Kurve DSGT, der Punkt V die Kurve IKLMNOPQ und der Punkt W die entsprechende RZ.

Von den besprochenen Mechanismen, deren Zahl sich noch vergrössern liesse, scheint für die Praxis am meisten geeignet zu sein der unter III. angeführte. Auch eine Abänderung desselben, bei welcher auch die Räder der Segelaxe als unrunde Kammräder ausgeführt werden, dürfte sich wegen der geringeren Excentricität der für diesen Fall durch Gleichung 22) dargestellten Kurven empfehlen.

§. 4. Anwendung des Princips auf einen Propeller, Theorie desselben.

Von der in Gleichung 10) erhaltenen Bedingung, $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ oder $\alpha = 90^0 + \frac{\varphi}{2}$, war nur bekannt, dass sie nicht ein Maximum der Nutzarbeit liefert. Ihre Bedeutung erhellt aus der Betrachtung der zusammengehörigen Werte:

$$\varphi = 0^0, \quad \alpha = 90^0,$$
$$\varphi = 90^0, \quad \alpha = 135^0,$$
$$\varphi = 180^0, \quad \alpha = 180^0,$$

Dort, wo die Bewegung in der Stromrichtung stattfindet, für $\varphi = 0$, ist kein Druck vorhanden, da die Druckfläche in der Stromrichtung steht; während bei der Bewegung gegen den Strom, für $\varphi = 180^0$, die Druckfläche den grössten Druck in entgegengesetzter Richtung erfährt. Dasselbe zeigt die Formel 4), wenn man darin setzt: $\alpha = 90^0 + \frac{\varphi}{2}$.

Man erhält:

44) $$A = - C \delta F a c^3 (1 + a) \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Der Wert der Nutzarbeit 44) ist immer negativ, ausser wenn a negativ und kleiner als 1 ist. Es ist also der Widerstand, welchen die strömende Flüssigkeit der Drehung entgegensetzt, ein Maximum, und in diesem Sinne ist die Nutzarbeit ein Minimum.

Bei dem Problem, einen Propeller zu konstruiren, welcher, durch irgend eine Kraft in Drehung gesetzt, durch Druck gegen die umgebende Flüssigkeit ein Fahrzeug forttreiben soll, handelt es sich nun darum, den Widerstand der Flüssigkeit möglichst gross zu machen. Freilich wird hier verlangt, dass die Widerstandskomponente in der Stromrichtung ein Maximum sei.

Es lässt sich aber leicht nachweisen, dass für $\alpha = 90^0 + \frac{\varphi}{2}$ die Winkel, welche die Stromrichtung und die Bahnrichtung mit der Druckfläche bilden, beide gleich $\frac{\varphi}{2}$ sind.

Daraus folgt, dass auch die Druckkomponenten in diesen Richtungen einander gleich sind, und dass somit obige Bedingungsgleichung 10) eine Lösung dieses Propeller-Problems bietet. Die Gleichung 10) ist zunächst abgeleitet für $a = \frac{1}{3}$, d. h. für den Fall, dass die Geschwindigkeit der Druckfläche ein Drittel der Stromgeschwindigkeit ist, und dass die Strömung der Drehung entgegenwirkt.

Dieser Fall findet sich z. B. bei einem Schiffe, welches, in voller Fahrt begriffen, durch den Propeller möglichst schnell hemmen will. Im allgemeinen ist aber für Propeller a grösser als 1, etwa 10 : 9, wenn man dies für die Schiffsschraube durchschnittlich gültige Verhältnis auf den neuen Propeller überträgt, was bei hinreichend grossen Druckflächen statthaft sein dürfte; auch ist die Stromrichtung hier die entgegengesetzte. Aus diesen Angaben liesse sich die beste Stellung der Druckflächen (Schaufeln) für einen Propeller gesondert ermitteln. Das Resultat würde von dem durch Gleichung 10) gegebenen nur wenig abweichen. Es ist aber hier auf die theoretische Genauigkeit weniger Gewicht zu legen, als auf die leichte praktische Ausführbarkeit. Und da besitzt die Gleichung 10) den Vorzug, dass sie auf einen sehr einfachen Mechanismus führt. Eine zweckentsprechende Form desselben ist in Fig. 13 dargestellt. Er besteht aus einem Kegelrade AB, welchem ein gleiches (in der Zeichnung fortgelassenes) Kegelrad gegenübersteht. Zwischen beiden Rädern läuft das Triebrad F, welches in einem um die gemeinsame Radaxe sich drehenden Excentrik CD gelagert ist. Nach einem bekannten Satze über solche Wendegetriebe ist die Drehgeschwindigkeit der Axe des Triebrades um die Axe G gleich der halben Summe der Drehgeschwindigkeiten beider Kegelräder. Wird nun das Kegelrad AB am

Axenlager des einem Ruderrade ähnlichen Propellers befestigt, während das andere Kegelrad an der Propellerdrehung teilnimmt, so hat die Axe des Triebrades und mit ihm das Excentrik die halbe Drehgeschwindigkeit des Propellers

Diese wird durch ein Lenkerkreuz oder derartiges Rad auf die zwischen zwei Radkränzen drehbar eingesetzten 6 oder mehr Schaufeln mittels Krummzapfen übertragen. Das Räderwerk kann dabei durch Gehäuse vollständig geschützt werden.

Die Anordnung des Propellers am Schiffskörper kann eine doppelte sein, mit vertikaler oder horizontaler Axe. Erstere Art gewährt manche Vorteile vor den bekannten Propellern, wenn man vorn und hinten am Schiff je einen Propeller anbringt, deren vertikale Axen entweder durch den Schiffsboden gehen oder seitlich auf verschiedenen Seiten der Mittellinie des Schiffs so angebracht sind, dass sie sammt den Propellern aus dem Wasser gehoben werden können. In beiden Fällen würden sie nahezu im freien Strom arbeiten, was bekanntlich für die Schraube nicht gilt und einen der wesentlichsten Mängel dieses Propellers bildet.

Da durch die Stellung des ruhenden Kegelrades AB (Fig. 13) die Richtung bestimmt wird, in welcher der Propeller wirkt, so kann man durch die Drehung dieses Rades von Hand, welche keine Schwierigkeiten bietet, den Propeller nach beliebigen horizontalen Richtungen wirken lassen, was nur beim Reactionspropeller in ähnlicher Weise möglich ist. Man kann daher ein mit derartigem Doppelpropeller versehenes Schiff ohne Benutzung eines Steuers beliebig vorwärts, rückwärts und, was bei keinem der bekannten Propeller möglich ist, seitwärts fahren lassen. Wenn man ferner die Propeller seitwärts, aber entgegengesetzt wirken lässt, wird das Schiff ohne Fahrt um sich selbst gedreht mit einer Geschwindigkeit, die bei keinem anderen Propeller auch nur angenähert zu erreichen ist. Denn bei allen dazu dienlichen Propellern, den Doppelschrauben, Ruderrädern und Reactionspropellern, ist der Hebelarm, an welchem die Propellerkraft auf die Drehung hinwirkt, etwa gleich der halben Schiffsbreite, während derselbe für den neuen Propeller nahe gleich der halben Schiffslänge ist.

Die zweite Art der Anordnung, mit horizontaler Axe, besitzt den eigenartigen Vorzug, dass der Propeller der wechselnden Wassertiefe entsprechend gesenkt und gehoben werden kann und dabei in jeder Lage gut arbeitet, nicht nur in der tiefsten Stellung, unter dem Kiel, sondern auch zum Teil aus dem Wasser hervorragend als Ruderrad. Zu diesem Zwecke ist das Rad in zwei mit einander verbundenen, hohlen Trägern von flachem Querschnitt so aufgehängt, dass es an diesen, welche um die Transmissionswelle drehbar sind, in beliebiger Lage festgestellt werden kann. Die Transmissionswelle liegt quer im Hinterteil des Schiffs, und die Träger haben eine solche Länge, dass der Propeller über das abgerundete Schiffsende bis unter den Kiel hinabgelassen werden kann. Die Kraftübertragung erfolgt von der Transmissionswelle aus durch „Stangenvorgelege“ in den hohlen Trägern.

Die Theorie des Propellers ist eine sehr vereinfachte. Es liegt nahe, sie so weit zu führen, dass eine Vergleichung der Leistungsfähigkeit mit der gleichfalls theoretisch abzuleitenden der Schiffsschraube möglich wird. Denn wenn auch die Theorie an sich hier sehr unzuverlässig ist, so dürfte doch die Vergleichung der theoretischen Ergebnisse ein ziemlich richtiges Bild geben, da sich erwarten lässt, dass die Abweichungen der Praxis sich für beide Theorien in ziemlich gleicher Weise geltend machen werden.

Bezeichnet (Fig. 14) AB den Radarm, CD die Schaufel, AE die Vertikale, so ist dem Vorigen gemäss $\alpha = \frac{\varphi}{2}$. Für $r = AB$ als Längeneinheit sei ferner $V = 2\pi$ die Geschwin-

digkeit der Schaufelmitte, a der Rücklauf, also (1 — a) V die Schiffsgeschwindigkeit — für die Zeit einer Raddrehung als Zeiteinheit —, so ist der Normaldruck auf die Schaufelmitte (mit Weglassung der Konstanten, da es sich hier nur um relative Werte handelt):

$$N = \left[V \cos\alpha - (1 - a) V \cos\alpha\right]^2 = a^2 V^2 \cos^2\alpha,$$

45) $$N = 4 a^2 \pi^2 \cos^2\alpha.$$

Die Arbeit des betreffenden Flächenelements für den unendlich kleinen Weg $d\varphi = 2\,d\alpha$ ist

46) $$2 N \cos\alpha\, d\alpha = 8 a^2 \pi^2 \cos^3\alpha\, d\alpha,$$

und die Nutzarbeit, d. i. die Komponente in der Stromrichtung, ist

47) $$2 N \cos^2\alpha\, d\alpha = 8 a^2 \pi^2 \cos^4\alpha\, d\alpha.$$

Die Gesammtarbeit des Flächenelements während einer Raddrehung ist demnach gegeben durch

48) $$A_t = 8 a^2 \pi^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha = 16\, a^2 \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\alpha\, d\alpha$$

$$= 16 a^2 \pi^2 \left[\frac{\sin\alpha}{3} (2 + \cos^2\alpha)\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} = 16\, a^2 \pi^2 \left[\frac{2}{3}\right]$$

48a) $$A_t = 1{,}053.$$

Die entsprechende Nutzarbeit ist

49) $$A_n = 16\, a^2 \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\, d\alpha$$

$$= 16\, a^2 \pi^2 \left[\sin\alpha \left(\frac{1}{4}\cos^3\alpha + \frac{3}{8}\cos\alpha\right) + \frac{3}{8}\, a\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}$$

49a) $$A_n = 16\, a^2 \pi^2 \left[0{,}589\right] = 0{,}9301.$$

Der theoretische Wirkungsgrad ist also

50) $$G = \frac{A_n}{A_t} = 0{,}8837 = 88\,\%.$$

Diese Resultate gelten streng nur für den Flächenstreifen längs der Mitte der Schaufel, da nur dort die Geschwindigkeit konstant = V. Die grössere Geschwindigkeit der äusseren Schaufelhälfte hat den Einfluss, dass sowol A_t wie A_n erhöht werden, aber in solchem Verhältnis, dass auch G noch erhöht wird.

Von dem theoretischen Wirkungsgrade ist in Abzug zu bringen der Betrag der durch die verschiedenen Widerstände verlorenen Arbeit. Es sei hier eine angenäherte Berechnung des relativen Betrages der hauptsächlichsten Widerstände versucht, d. i. des Widerstandes für die Kante der Schaufel und der Reibung längs der Fläche derselben.

Der erstere werde proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit angenommen. Man findet die relative Geschwindigkeit der Schaufelkante im Wasser $s = V \cdot \sqrt{a^2 + 4(1-a)\sin^2\alpha}$, wofür, da a nur klein, mit genügender Annäherung gesetzt werden kann

51) $$s = 2 V \sin\alpha = 4\pi \sin\alpha.$$

Der Widerstand für die Flächeneinheit ist dann gleich s^2, und die dadurch vernichtete Arbeit:

52) $$W_a = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} s^2 \sin\alpha\, da = 64\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\alpha\, d\alpha$$

$$= -64\pi^2 \left[\frac{1}{3}\cos\alpha(\sin^2\alpha + 2)\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} = +64\pi^2\left[\frac{2}{3}\right]$$

52a) $$W_a = 421{,}10.$$

Die Reibung längs der Schaufelfläche ist unter der Voraussetzung, dass sie proportional Weg und Druck — ein strenges Gesetz darüber fehlt —,

53) $$s\,N = 16\,a^2\pi^3 \sin\alpha\cos^2\alpha,$$

und die durch die Reibung im Wasser verlorene Arbeit

54) $$R_a = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} s\,N \sin\alpha\, d\alpha$$

$$= 64\,a^2\pi^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$= 16\,a^2\pi^3 \left[\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos^3\alpha + \frac{\alpha}{2}\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}}$$

54a) $$R_a = 16\,a^2\pi^3\left[\frac{\pi}{4}\right] = 3{,}896.$$

Zur Vergleichung mit der Schraube sei hier die Theorie derselben aus den gleichen Prinzipien abgeleitet. Es wird dabei für die Ganghöhe der Schraube die practische Angabe zu Grunde gelegt, dass bei guten Schrauben einer Schraubendrehung ein Vorrücken des Schiffs um den Schraubendurchmesser entspricht, und dass der Rücklauf gleich $\frac{1}{10}$ zu setzen ist. Bezeichnet dann φ den Winkel, welchen ein im Abstande x von der Drehungsaxe befindliches Flächen-

55) element mit der Drehungsebene bildet, ferner $2\,d = 2\left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = \frac{2}{1-a}$ die Ganghöhe der Schraube, so ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{\pi x}$.

Für die gleiche Schiffsgeschwindigkeit wie oben macht die Schraube (1 — a) π Umdrehungen in der Zeiteinheit, die Drehgeschwindigkeit für den Punkt x ist also

56) $$V_, = 2\,(1 - a)\,\pi^2 x \text{ oder } V_, = 2\,\pi \operatorname{ctg} \varphi.$$

Der Normaldruck ist demnach:

57) $$N_, = (V_, \sin \varphi - 2\,(1 - a)\,\pi \cos \varphi)^2 = 4\,a\,{}^2\pi^2 \cos^2 \varphi.$$

Die von dem betrachteten Flächenelement mit der Breite dx während der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist

$$N_, V_, \sin \varphi\, dx = 8\,a\,{}^2\pi^3 \cos^3 \varphi\, dx \text{ oder,}$$

$$\text{da } dx = -\frac{d\, d\varphi}{\pi \sin^2 \varphi}$$

58) $$= -\,8\,a^2 d\pi^2 \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Die Gesammtarbeit der Flächeneinheit $A_{t,}$ ergiebt sich durch Integration nach x von 0 bis 1 oder entsprechend über φ von $\frac{\pi}{2}$ bis arc. tg $\frac{d}{\pi} = 19^0\ 30' = \varphi_a$:

59) $$A_{t,} = -\,8\,a^2\,d\,\pi^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_a} \frac{\cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$= +\,8\,a^2\,d\,\pi^2 \left[\frac{1 + \sin^2 \varphi}{\sin \varphi}\right]_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\varphi_a = 19^0\,30'},$$

59a) $$A_{t,} = 8\,a^2\,d\,\pi^2\,[1{,}330] = 1{,}167.$$

Die entsprechende Nutzarbeit ist

60) $$A_{n,} = 8\,a^2\,d\,\pi^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_a} \frac{\cos^4 \varphi}{\sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

$$= 8\,a^2\,d\,\pi^2 \left[\frac{\cos^5 \varphi}{\sin \varphi} + 4 \sin \varphi \left(\frac{1}{4} \cos^3 \varphi + \frac{3}{8} \cos \varphi\right) + \frac{3}{2}\,\varphi\right]_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\varphi = \varphi_a}$$

60a) $$A_{n,} = 8\,a^2\,d\,\pi^2\,[1{,}136] = 0{,}996.$$

Hieraus ergiebt sich der Wirkungsgrad:

61) $$G_, = \frac{A_{n,}}{A_{t,}} = 0{,}8539 = 85\,\%.$$

Für Schrauben mit grösserer Steigung, wie solche häufig vorkommen, ist der theoretische Wirkungsgrad geringer. Beispielsweise ist derselbe für Schrauben, deren Grenzwinkel $\varphi_a = 30^0$

62) $$G_2 = \frac{A_{n_2}}{A_{t_2}} = \frac{0,3779}{0,50} = 0,7558 = 76\,\%.$$

Der Betrag des Widerstandes und der Reibung im Wasser ist ähnlich wie oben zu ermitteln.

In gleicher Annäherung ist die Widerstandsarbeit für die Flächen- und Zeiteinheit gegeben durch:

63) $$W_{a,} = \int s,\,{}^2 V,\,\cos\varphi\, dx,$$

$$s, = \frac{2\pi}{\sin\varphi},\ V, = 2\pi\,\mathrm{ctg}\,\varphi,\ dx = -\frac{d\,d\varphi}{\pi\sin^2\varphi},$$

also $$W_{a,} = -8\,d\,\pi^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_a} \frac{\cos^2\varphi}{\sin^5\varphi}\,d\varphi,$$

$$= 2\,d\,\pi^2 \left[\frac{\cos^3\varphi}{\sin^4\varphi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} + \cos\varphi + \log\ \mathrm{nat.}\ \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right)\right]_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\varphi_a = 19^0\,30'}$$

63a) $$W_{a,} = 2\,d\,\pi^2\left[70,81\right] = 1553,0.$$

Die entsprechende Reibungsarbeit ist

64) $$R_{a,} = \int s,\,N,\,V,\,\cos\varphi\,dx = -16\,a^2\,d\,\pi^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_a} \mathrm{ctg}^4\varphi\,d\varphi,$$

$$= +16\,a^2\,d\,\pi^3 \left[\frac{1}{3}\,\mathrm{ctg}^3\varphi - \mathrm{ctg}\,\varphi - \varphi\right]_{\varphi = \frac{\pi}{2}}^{\varphi_a = 19^0\,30'},$$

64a) $$R_{a,} = 16\,a^2\,d\,\pi^3\left[5,913\right] = 32,59.$$

Resultate.

Zur Vergleichung folgt hier eine Zusammenstellung der einzelnen Resultate. Es ergab sich:

für den neuen Propeller		für die Schiffsschraube
	Totalarbeit	
$A_t = 1,053$		$A_{t,} = 1,167$
	Nutzarbeit	
$A_n = 0,930$		$A_{n,} = 0,996$
	theoret. Wirkungsgrad	
$\frac{A_n}{A_t} = 88\,\%$		$\frac{A_{n,}}{A_{t,}} = 85\,\%$

Kraftverluste:

Widerstandsarbeit

$W_a = 421,10$ $\qquad$ $W_{a_1} = 1553,0$

Reibungsarbeit

$R_a = 3,896$ $\qquad$ $R_{a_1} = 32,59.$

Die Resultate sind, da sie für die gleichen Einheiten gelten, direkt zu vergleichen. Nur bei den Kraftverlusten sind für den neuen Propeller die Zahlenfaktoren um $^1/_{16}$ zu erhöhen, da für gleiche Arbeitsleistung die Druckflächen des Propellers etwa $^1/_{16}$ grösser sein müssen als die der Schraube.

Nach dieser Reduktion ist dennoch für die Schraube der durch den Widerstand des Wassers bedingte Kraftverlust $3^1/_2$ mal, der durch die Reibung verursachte etwa 8 mal so gross als bei dem neuen Propeller.

Dies Resultat kann bei der etwa dreifachen Drehgeschwindigkeit der Schraube nicht überraschen. Mit Berücksichtigung der übrigen Widerstände, welche am neuen Propeller vermöge seiner Einrichtung und grösseren Ausdehnung auftreten, die etwa das Doppelte des für die Druckflächen berechneten Kraftverlustes betragen mögen, wäre demnach für den Propeller etwa der halbe Kraftverlust der Schraube anzunehmen. Dieser lässt sich auch für die Schraube nur schätzen. Setzt man ihn gleich 20 $^0/_0$, so folgen für den neuen Propeller 10 $^0/_0$.

Freilich ist dieses Resultat mit viel Unsicherheit behaftet. Eine Prüfung des neuen Propellers wäre nur durch ausgedehnte praktische Versuche möglich. Trotzdem möge auch der daraus berechnete effective Wirkungsgrad hier Platz finden.

Effectiver Wirkungsgrad:

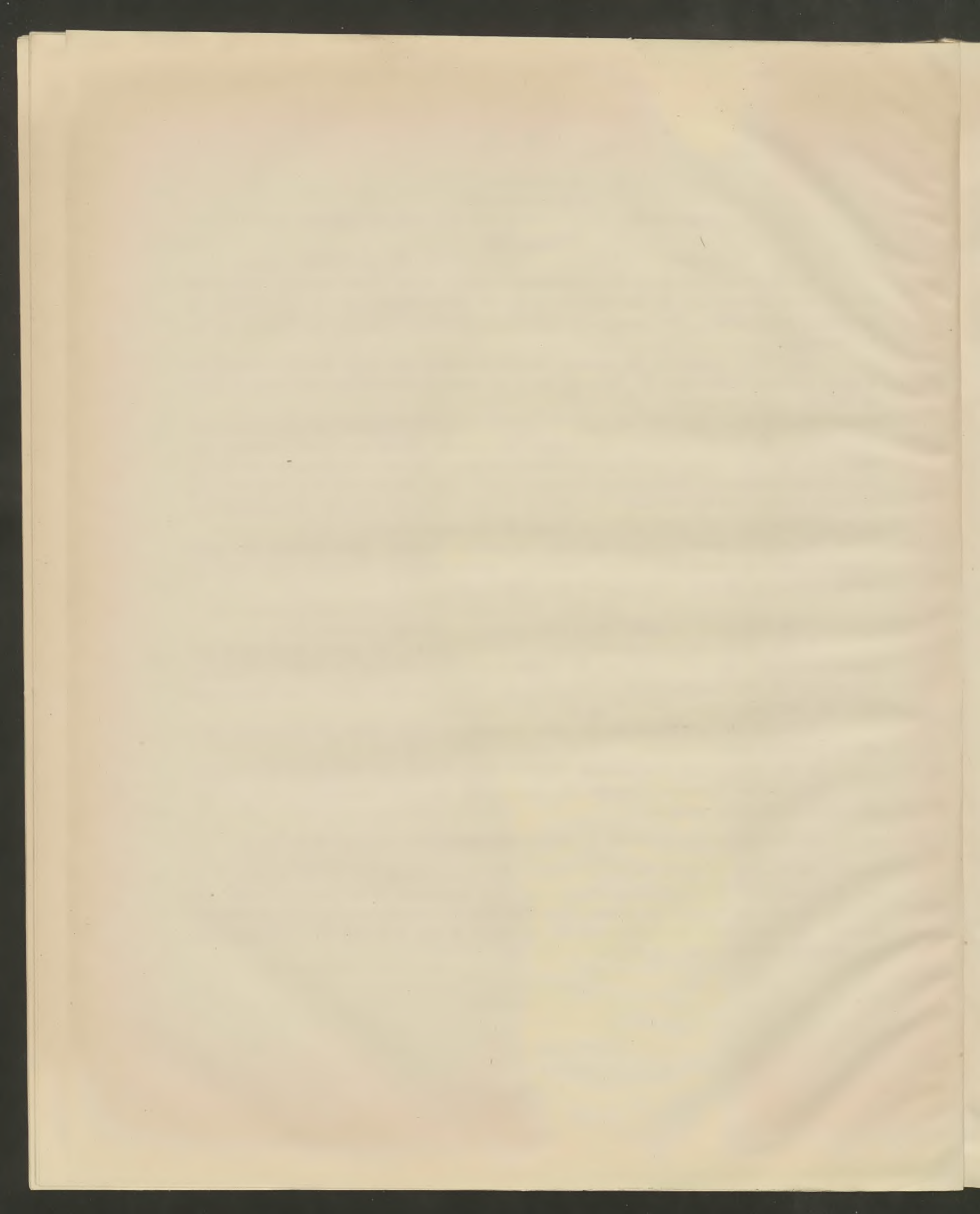
für den neuen Propeller 78 $^0/_0$, $\qquad$ für die Schraube 65 $^0/_0$.

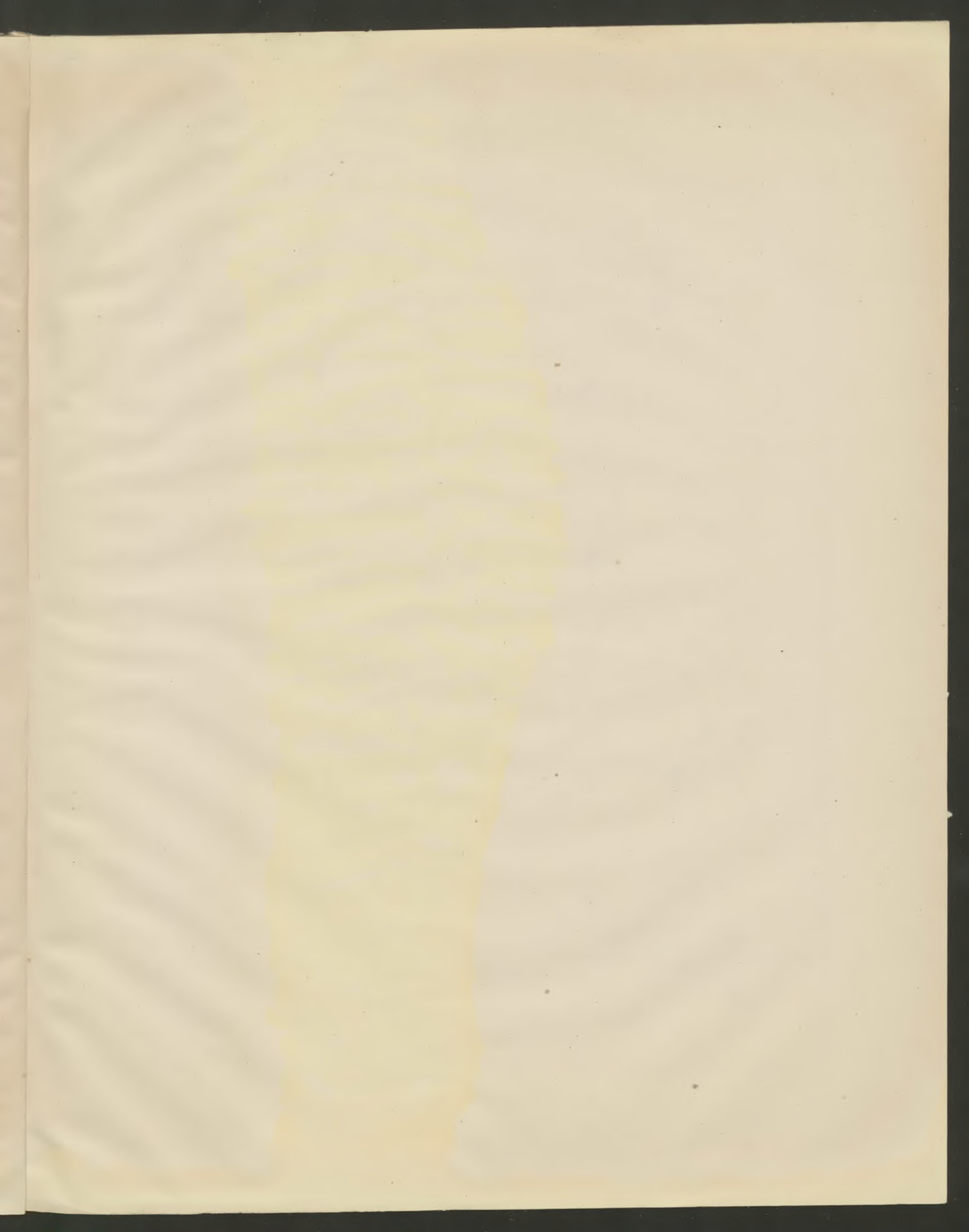
In Fig. 15 ist die Arbeitsleistung einer Schaufel während der halben Raddrehung graphisch dargestellt. Die Abscissen sind die verschiedenen Werte von α, die positiven Ordinaten stellen dann die dem Abscissenwerte α entsprechende Nutzarbeit, die negativen den Kraftverlust dar. Die gesammte Fläche RSTUV ist also die Totalarbeit.

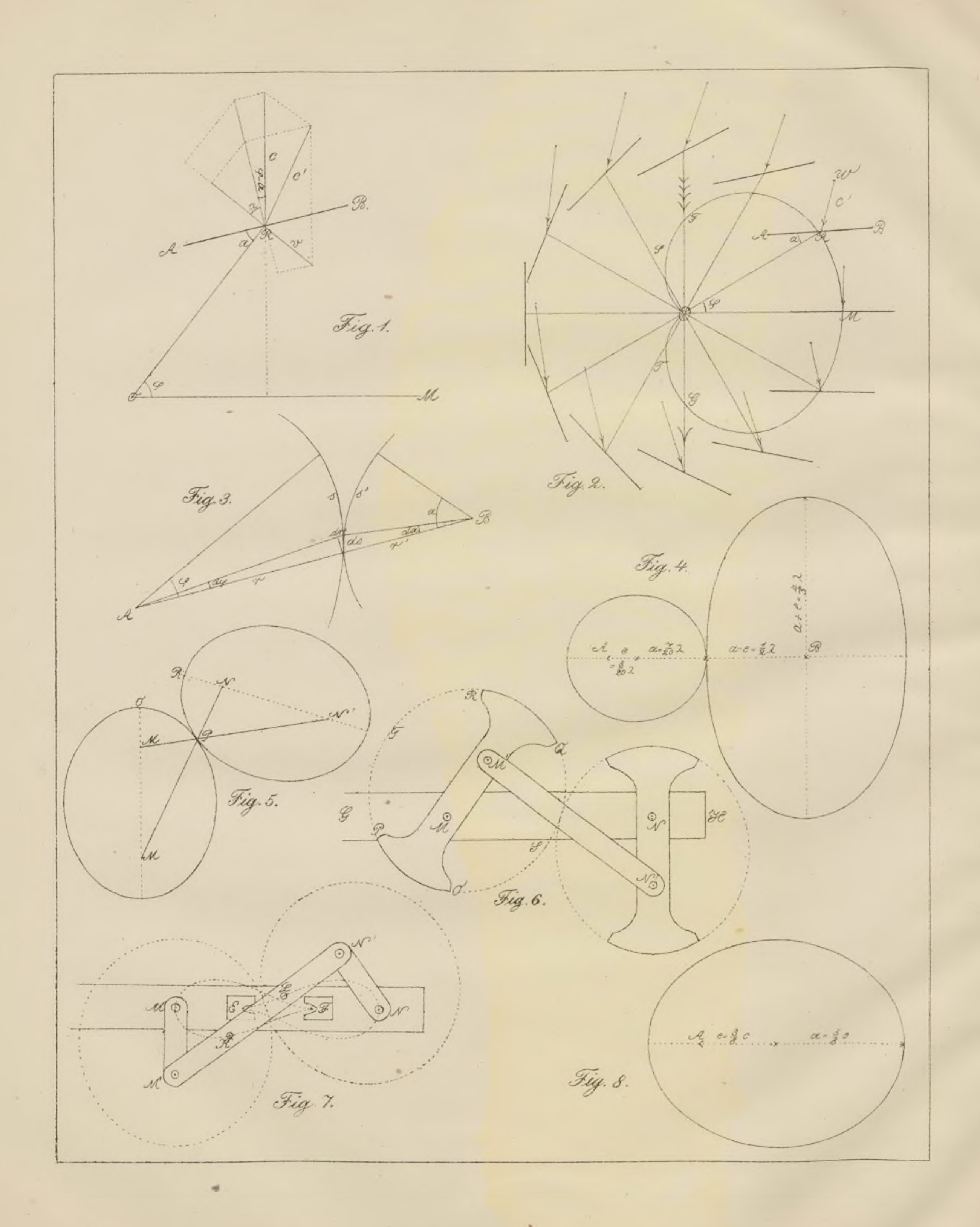
Trotzdem die Arbeitsleistung bei einer Schaufel so stark variirt, ist sie schon bei 3 oder 4 Schaufeln streng konstant.

In der vorliegenden Untersuchung konnten einige Punkte nur flüchtig berührt werden; unter diesen dürften besonders folgende ein theoretisches Interesse beanspruchen und zu eingehenderer Behandlung anregen.

Die Integration des Ausdrucks 4) und die Ermittelung des strengen Wertes für $a = \frac{v}{c}$, welcher das Integral zu einem Maximum macht. Die Untersuchung der in den Figuren 4, 11 und 12 dargestellten Kurven höheren Grades und ihrer Beziehung zu den Kegelschnitten. Die Theorie der von den Punkten der Mittelschiene M′N′ (Fig. 7) beschriebenen lemniskatenähnlichen Kurven. Die Ermittelung der Zahnkurven für die Räder A und B in Fig. 11. Die allgemeine Untersuchung der Rolllinien der Parabel in Fig. 12.






Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.

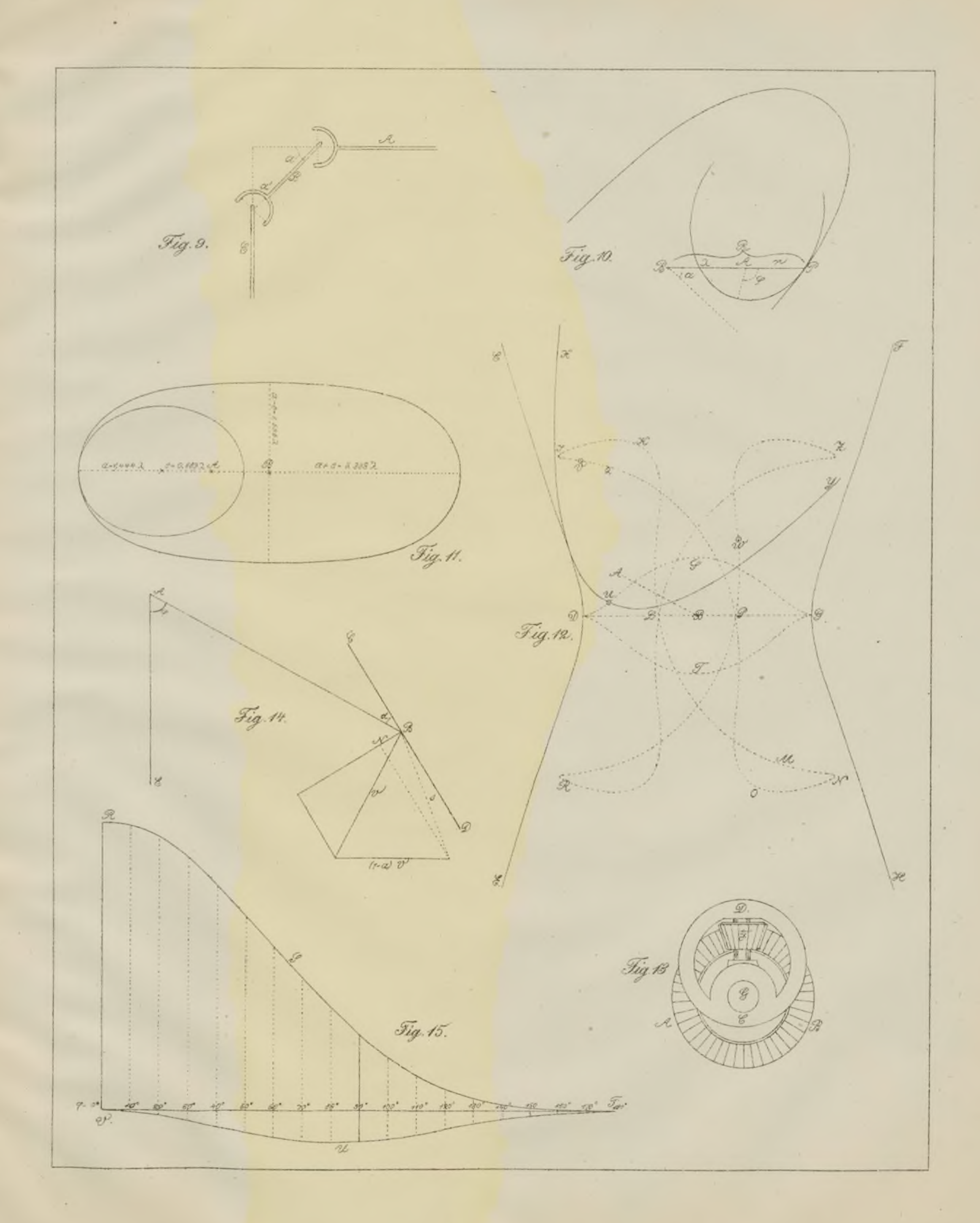


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13
Fig. 14.
Fig. 15.

